はじめに

難関大の理系の問題といえども数学である以上やることは決っています.
普段練習している通りに解答が書ければ，十分に合格点に辿り着けるはずです.
しかしながら普段の問題集の演習の場合には問題を解けても，入試問題となると途端に手が止ってしまう受験生が多いのも事実です.

それは入試問題に対する戦い方を練習していないことが原因です.
過去問を演習する一番大きな目的はそこです.
自分の頭の中にある知識を，どういう場面でどう使うのか，それが分かるようになる為の練習をこれから行なうことになります.
自分にはなかった知識に触れたときには，類題を探し出して練習しましょう.
自分が思いつかなかった発想に出会ったときには，どうしてそう思いついたのか真剣に考えましょう.

すべては訓練です.

それでは頑張りましょう.

堺　義明

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

難関国公立大数学Ⅲ対策講座

目　次

第１講　複素数と軌跡，積分評価と極限，面積で評価— p.4
第２講　複素数と漸化式，面積と極限，積分と漸化式– p.10
第３講　複素数と漸化式，三項間漸化式と極限，面積で評価— p.16
第４講　３次の面積と無限級数，不等式が成り立つ条件，斜回転体の体積– p.22
第５講　ド・モワブルと不等式，増減と有理数解，回転体を平面で切る— p.28
第６講　速度ベクトル，共通接線と増減，球の一部の体積– p.34
第７講　楕円と接線，不等式が成り立つ条件，回転体の体積— p.40
第８講　漸化式と不等式と極限，積分で表された関数，球を回転させた体積– p.46
第９講　極値をもつことの証明，不等式の不等式への応用，球が外接するとき– p.52
第10講　複素数の実部や絶対値，積分と不等式と極限，積分と漸化式– p.58

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　複素数と軌跡，積分評価と極限，面積で評価

1　t を実数とするとき，2 次方程式

$$z^2+tz+t=0$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　この方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ．

(2)　(1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す．t が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ．

(3)　複素数平面上で，点 z が(2)の図形 C 上を動くとき，

$$w=\frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ．　《05 九大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 $a>0$ を実数とする．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，座標平面の 3 点

$$(2n\pi,\ 0),\ \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\right),\ ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx,\ C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx$$

とおく．

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ．

《15 東北大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ．

(2)　不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ．

(3)　n を 3 以上の整数とするとき，不等式

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$$

が成り立つことを示せ．

《15 九大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　複素数と漸化式，面積と極限，積分と漸化式

4　次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1=1,\ z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える．ただし，i は虚数単位である．

(1)　z_2，z_3 を求めよ．

(2)　上の漸化式を $z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\alpha)$ と表したとき，複素数 α を求めよ．

(3)　一般項 z_n を求めよ．

(4)　$z_n=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ．

《04 北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

5　e を自然対数の底とし，t を $t>e$ となる実数とする．このとき，曲線 $C : y=e^x$ と直線 $y=tx$ は相異なる２点で交わるので，交点のうち x 座標が小さいものをP，大きいものをQとし，P，Qの x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする．また，Pにおける C の接線とQにおける C の接線との交点をRとし，

曲線 C，x 軸および２つの直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれる部分の面積を S_1，

曲線 C および２つの直線PR，QRで囲まれる部分の面積を S_2

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1)　$\dfrac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ．

(2)　$\alpha<\dfrac{e}{t}$，$\beta<2\log t$ となることを示し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．必要ならば，$x>0$ のとき $e^x>x^2$ であることを証明なしに用いてよい．

《15 名大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6　n は自然数，a は $a>\dfrac{3}{2}$ をみたす実数とし，実数 x の関数

$$f(x)=\int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta$$

を考える．ただし，$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta=1$ とする．

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta$ を示せ．

(2)　$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ をみたす n と a の値を求めよ．

(3)　(2)で求めた n と a に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ．

《15 北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　複素数と漸化式，三項間漸化式と極限，面積で評価

7　複素数 a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める．

$$a_1=1+i,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-3}$$

ただし，i は虚数単位である．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　複素数平面上の 3 点 0，a_1，a_2 を通る円の方程式を求めよ．

(2)　すべての a_n は(1)で求めた円上にあることを示せ．

《05 北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

8　xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 C_1，C_2，C_3，…を次のように定める．

- C_1 と C_2 は半径 1 の円で，互いに外接する．
- 正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある．

円 C_n の半径を r_n とする．

(1)　等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ．

(2)　すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α，β，s，t の値を 1 組与えよ．

(3)　$n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ．

《14 名大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ.

《14 阪大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　３次の面積と無限級数，不等式が成り立つ条件，斜回転体の体積

10　xy 平面上の曲線 $C: y=x^3+x^2+1$ を考え，C 上の点 $(1,\ 3)$ を P_0 とする．$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$ とする．このとき P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする．

(1)　S_1 を求めよ．

(2)　x_k を k を用いて表せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$ を求めよ．

《14 東工大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

11 $a>1$ とし，次の不等式を考える．

$$(*)\quad \frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1) $a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての $t>0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

《14 東工大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

12 点 P$(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}\,t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする．さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする．

(1) 点 Q$(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ．

(2) 直線 $y=a$ と曲線 C がただ１つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ．

(3) 図形 D を y 軸のまわりに１回転して得られる回転体の体積 V を求めよ．

《14 東工大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　ド・モワブルと不等式，増減と有理数解，回転体を平面で切る

13 n 自然数とする．

(1) n 個の複素数 z_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $0 \leqq \arg z_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたすならば，不等式

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_n|^2$$

が成り立つことを示せ．

(2) n 個の実数 θ_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $0 \leqq \theta_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=1$ をみたすならば，不等式

$$\sqrt{n-1} \leqq \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n$$

が成り立つことを示せ．

《04 阪大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

14　次の問に答えよ．

(1)　関数 $f(x)=x^{-2}2^x\ (x\neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ．

(2)　方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ．

(3)　方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ．

《15 名大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

15　$a>0$ とする．曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに１回転してできる回転体を A とする．

(1)　A の体積 V を求めよ．

(2)　点 $(t,\ 0)$ $(-a \leqq t \leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)} ds$$

を示せ．

(3)　不等式

$$\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx$$

を示せ．

《15 東工大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　速度ベクトル，共通接線と増減，球の一部の体積

16　xy 平面上を運動する点 P の時刻 $t\,(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が

$$x=t^2\cos t,\quad y=t^2\sin t$$

で表されている．原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ．

(2)　$\vec{v}$ が y 軸に平行になるような $t\,(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする．このとき不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ．

《15 東工大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

17　a は実数とし，2つの曲線

$$C_1 : y=(x-1)e^x,\quad C_2 : y=\frac{1}{2e}x^2+a$$

がある．ただし，e は自然対数の底である．C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする．

(1)　a を t で表せ．

(2)　t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ．

《15 北大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

18 座標空間の x 軸上に動点P，Qがある．P，Qは時刻0において，原点を出発する．Pは x 軸の正の方向に，Qは x 軸の負の方向に，ともに速さ1で動く．その後，ともに時刻1で停止する．点P，Qを中心とする半径1の球をそれぞれ A，B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 時刻 $t(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ．

(2) $V(t)$ の最大値を求めよ．

《15 阪大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　楕円と接線，不等式が成り立つ条件，回転体の体積

19　xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする．

$$x^2+4y^2=1,\ x>0,\ y>0$$

Ｐを C 上の点とする．Ｐで C に接する直線を l とし，Ｐを通り l と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする．Ｐが C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときのＰの座標を求めよ．

《15 東北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

20　$t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件(ア)(イ)を満たす．

(ア)　$t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)\geqq 1+x$$

が成り立つ．

(イ)　$t>0$ に対して，等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$$

を満たす実数 x が存在する．

このとき，$f(t)$ を求めよ．

《14 阪大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

21　関数 $f(x)=x-\sin x\left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを l とする．

(1)　l の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ．

(2)　a は(1)で求めたものとする．曲線 $y=f(x)$，直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに１回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

《14 九大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　漸化式と不等式と極限，積分で表された関数，球を回転させた体積

22 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{4a_n-9}{a_n-2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．また数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$$

と定める．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) すべての n に対して，不等式 $b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

《15 東工大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

23　$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|d\theta$ とおく．

(1)　$f'(x)$ を求めよ．

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ．

《14 北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

24 空間内にある半径 1 の球(内部を含む)を B とする．直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である．

(1) B の中心と l との距離を求めよ．

(2) l のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

《14 名大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　極値をもつことの証明，不等式の不等式への応用，球が外接するとき

25　2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

と定義する．$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ．

《14 九大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

26 以下の問いに答えよ．

(1) n を自然数，a を正の定数として，

$$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$$

とおく．$x>0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

《14 東北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

27 半径 1 の 2 つの球 S_1 と S_2 が 1 点で接している．互いに重なる部分のない等しい半径を持つ n 個 $(n \geqq 3)$ の球 T_1，T_2，…，T_n があり，次の条件(ア)(イ)を満たす．

(ア)　T_i は S_1，S_2 にそれぞれ 1 点で接している $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$．

(イ)　T_i は T_{i+1} に 1 点で接しており $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，そして T_n は T_1 に 1 点で接している．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　T_1，T_2，…，T_n の共通の半径 r_n を求めよ．

(2)　S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，T_1，T_2，…，T_n の体積の和を W_n とするとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$$

を求めよ．

《14 阪大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　複素数の実部や絶対値，積分と不等式と極限，積分と漸化式

28　z を絶対値が 1 の複素数とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　$z^3 - z$ の実部が 0 となるような z をすべて求めよ．

(2)　$z^5 + z$ の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ．

(3)　n を自然数とする．$z^n + 1$ の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ．

《04 東北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

29 自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\ (x\geqq 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^n f_n(x)dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)dx$ を示せ．

(2) 数列 $\{I_n\}$を

$$I_n=\int_0^n f_n(x)dx$$

で定める．$0\leqq x\leqq 1$ のとき $\log(1+x)\leqq\log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることは用いてよい．

《15 阪大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

30　整数 n に対して，$I_n=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}dx$ とする．

(1)　I_0 を求めよ．

(2)　n を正の整数とするとき，I_n-I_{n-1} を求めよ．

(3)　I_5 を求めよ．

《14 東北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　複素数と軌跡，積分評価と極限，面積で評価

1　t を実数とするとき，2 次方程式

$$z^2+tz+t=0$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　この方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ．

(2)　(1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す．t が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ．

(3)　複素数平面上で，点 z が(2)の図形 C 上を動くとき，

$$w=\frac{iz}{z+1}$$

で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ．　《05 九大・理系》

【答】　(1)　$0<t<4$，$z=\dfrac{-t\pm\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}$　　(2)　略　　(3)　略

【解説】　以下，虚数単位を i とする．

(1)　与式の判別式が負であればよいので $t^2-4t<0 \iff t(t-4)<0$ ゆえに $\boldsymbol{0<t<4}$.

また解の公式より $z=\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2-4t}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{-t\pm\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}}$.

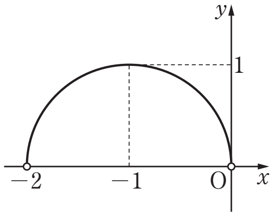
(2)　(1)より $z(t)=\dfrac{-t+\sqrt{4t-t^2}\,i}{2}$ である．ここで $x=-\dfrac{t}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{4t-t^2}}{2}$ とおくと，

$t=-2x$ より　$y=\dfrac{\sqrt{4(-2x)-(-2x)^2}}{2}$ かつ $0<-2x<4$

$\iff$ $y\geqq 0$ かつ $y^2=-2x-x^2$ かつ $-2<x<0$

$\iff$ $(x+1)^2+y^2=1$ かつ $y>0$

を得るので，求める図形 C は中心 -1 で半径 1 の円上の虚部が正の部分．よって求める図は右図．

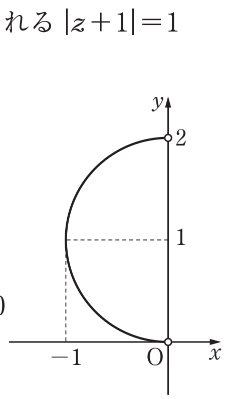


(3)　$w=\dfrac{iz}{z+1}$ より $(w-i)z=-w$ となるが，$w=i$ とすると z は解をもたなくなるので不適．よって $w\neq i$ なので $z=\dfrac{-w}{w-i}$ とできる．これを(2)の結果より得られる $|z+1|=1$ かつ $\dfrac{z-\overline{z}}{2i}>0$ に代入すると

$$\left|\frac{-w}{w-i}+1\right|=1 \text{ かつ } \frac{\dfrac{-w}{w-i}-\dfrac{-\overline{w}}{\overline{w}+i}}{2i}>0$$

$$\iff \left|\frac{-i}{w-i}\right|=1 \text{ かつ } \frac{w+\overline{w}}{|w-i|^2}<0 \iff |w-i|=1 \text{ かつ } \frac{w+\overline{w}}{2}<0$$

となるので，求める図は右図．



©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 $a>0$ を実数とする．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，座標平面の3点

$$(2n\pi,\ 0),\ \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\right),\ ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx,\ C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx$$

とおく．

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ．

《15 東北大・理系》

【答】 (1) 略　(2) $\dfrac{\pi}{4}$　(3) 1

【解説】 (1) $2n\pi\leqq x\leqq(2n+1)\pi$ より $\dfrac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq\dfrac{1}{x^a}\leqq\dfrac{1}{(2n\pi)^a}$ が成り立つので

$$\frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx\leqq\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx\leqq\frac{1}{(2n\pi)^a}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx$$

を得るが，$\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}=2$ より $\dfrac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\dfrac{2}{(2n\pi)^a}$ が示された．

(2) $A_n=\dfrac{1}{2}\{(2n+1)\pi-2n\pi\}\cdot\dfrac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}=\dfrac{\pi}{2\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$ であり，(1)の結果より

$\dfrac{(2n\pi)^a}{2}\leqq\dfrac{1}{B_n}\leqq\dfrac{\{(2n+1)\pi\}^a}{2}$ となるので

$\dfrac{(2n\pi)^a}{4\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\pi\leqq\dfrac{A_n}{B_n}\leqq\dfrac{\{(2n+1)\pi\}^a}{4\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\pi$ 　つまり

$$\frac{1}{4\left(1+\frac{1}{4n}\right)^a}\pi\leqq\frac{A_n}{B_n}\leqq\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^a}{4\left(1+\frac{1}{4n}\right)^a}\pi$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^a=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^a=1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　(1), (2)と同様に $\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin^2 x\,dx=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{2x-\sin 2x}{4}\right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}=\frac{\pi}{2}$

より $\frac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq C_n\leqq\frac{\pi}{2(2n\pi)^a}$ となるので $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4n}\right)^a}\leqq\frac{A_n}{C_n}\leqq\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^a}{\left(1+\frac{1}{4n}\right)^a}$ を得る.

(2)と同様に $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}=\mathbf{1}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　以下の問いに答えよ.

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ.

(2)　不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ.

(3)　n を 3 以上の整数とするとき，不等式

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$$

が成り立つことを示せ.

《15 九大・理系》

【答】 (1)　略　　(2)　$-\dfrac{1}{\log x}+C$ (C は積分定数)　　(3)　略

【解説】 (1)　$y=x^{-1}(\log x)^{-2}$ より

$y'=-x^{-2}\cdot(\log x)^{-2}+x^{-1}\cdot(-2)(\log x)^{-3}\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\log x+2}{x^2(\log x)^3}$ であり，$x>1$ のとき

$\log x>0$ なので，$y'<0$.

よって $x>1$ において単調に減少することが示された.

(2)　$\left\{-(\log x)^{-1}\right\}'=(\log x)^{-2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ より

$\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx=$ $\boldsymbol{-\dfrac{1}{\log x}+C}$ **(C は積分定数)**

(3)　3 以上の整数 k に対し，(1)の結果より $1<x<k$ のとき

$$\frac{1}{x(\log x)^2}>\frac{1}{k(\log k)^2}$$

が成り立つので

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x(\log x)^2}dx>\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k(\log k)^2}dx \text{ つまり } \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x(\log x)^2}dx>\frac{1}{k(\log k)^2}$$

が成り立つ．この最後の式において $k=3,\ 4,\ \cdots,\ n$ を代入したものの和をとることで

$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\int_{2}^{n}\frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を得るが,

$\displaystyle\int_{2}^{n}\frac{1}{x(\log x)^2}dx=\left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^n=\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log n}$ であることと $\dfrac{1}{\log n}>0$ より

$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$ が示された.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　複素数と漸化式，面積と極限，積分と漸化式

4　次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1=1,\ z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える．ただし，i は虚数単位である．

(1)　z_2，z_3 を求めよ．

(2)　上の漸化式を $z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\alpha)$ と表したとき，複素数 α を求めよ．

(3)　一般項 z_n を求めよ．

(4)　$z_n=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ．

《04 北大・理系》

【答】 (1)　$z_2=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$，$z_3=1+i\sqrt{3}$　　(2)　$\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

(3)　$z_n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$　　(4)　$n=6k+5\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

【解説】 (1)　$\boldsymbol{z_2}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1+1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}+1=\boldsymbol{\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}}$，

$\boldsymbol{z_3}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_2+1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}+1=\boldsymbol{1+i\sqrt{3}}$．

(2)　$z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\alpha)\iff z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\alpha$ より

$\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\alpha=1$　よって $\boldsymbol{\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}}$．

(3)　(2)より $z_n-\alpha=(z_1-\alpha)\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$ よって $\boldsymbol{z_n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}}$．

(4)　$z_n=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ より

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}=-1$$

$$\iff \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-2}=-1$$

$$\iff \cos\frac{n-2}{3}\pi+i\sin\frac{n-2}{3}\pi=\cos\pi+i\sin\pi$$

$\dfrac{n-2}{3}\pi\geqq-\dfrac{\pi}{3}$ より $\dfrac{n-2}{3}\pi=(2k+1)\pi\ (k=0,\ 1,\ \cdots)$

よって $\boldsymbol{n=6k+5\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)}$．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

5 e を自然対数の底とし，t を $t>e$ となる実数とする．このとき，曲線 $C: y=e^x$ と直線 $y=tx$ は相異なる 2 点で交わるので，交点のうち x 座標が小さいものを P，大きいものを Q とし，P，Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする．また，P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし，

曲線 C，x 軸および 2 つの直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれる部分の面積を S_1，

曲線 C および 2 つの直線 PR，QR で囲まれる部分の面積を S_2

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ．

(2) $\alpha<\dfrac{e}{t}$，$\beta<2\log t$ となることを示し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．必要ならば，$x>0$ のとき $e^x>x^2$ であることを証明なしに用いてよい．

《15 名大・理系》

【答】 (1) $\dfrac{1-\alpha\beta}{2}$　(2) $\dfrac{1}{2}$

【解説】 (1) $e^x=tx$ の 2 つの実数解が α と β より，$e^\alpha=t\alpha$ …①，$e^\beta=t\beta$ …②が成り立つ．

このとき $S_1=\displaystyle\int_\alpha^\beta e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_\alpha^\beta=e^\beta-e^\alpha$ なので，①と②を用いて $S_1=t(\beta-\alpha)$ となる．

また，$y=e^x$ のとき $y'=e^x$ より P における接線は

$y=e^\alpha(x-\alpha)+e^\alpha$　∴　$y=e^\alpha x+(1-\alpha)e^\alpha$ となるので，①を用いると

$y=t\alpha x+t\alpha(1-\alpha)$ となる．同様に Q における接線も $y=t\beta x+t\beta(1-\beta)$ となるので，2 式を連立して

$$t\alpha x+t\alpha(1-\alpha)=t\beta x+t\beta(1-\beta) \iff t(\beta-\alpha)(x-\alpha-\beta+1)=0$$

なので $x=\alpha+\beta-1$ より $\mathrm{R}(\alpha+\beta-1,\ t\alpha\beta)$ を得る．よって

$$S_2=S_1-\left\{\frac{(t\alpha+t\alpha\beta)(\beta-1)}{2}+\frac{(t\beta+t\alpha\beta)(1-\alpha)}{2}\right\}=S_1-\frac{t}{2}(\beta-\alpha)(1+\alpha\beta)$$

となるので，$\dfrac{S_2}{S_1}=1-\dfrac{1}{2}(1+\alpha\beta)=\boldsymbol{\dfrac{1-\alpha\beta}{2}}$．

(2) $f(x)=e^x-tx$ とおくと，$f'(x)=e^x-t$ より $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	$\log t$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

このとき $f(0)=1>0$，$f(1)=e-t<0$ より $0<\alpha<1$，$\beta>1$ がわかる．

ここで①より $t=\dfrac{e^\alpha}{\alpha}$ なので $\dfrac{e}{t}-\alpha=\dfrac{\alpha}{e^{\alpha-1}}-\alpha=\dfrac{\alpha(1-e^{\alpha-1})}{e^{\alpha-1}}>0$ よって $\dfrac{e}{t}>\alpha$ が示された．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

　また②より $t=\dfrac{e^{\beta}}{\beta}$ なので $2\log t-\beta=2\log\dfrac{e^{\beta}}{\beta}-\beta=\beta-2\log\beta$ である.

$g(\beta)=\beta-2\log\beta$ とおくと $g'(\beta)=1-\dfrac{2}{\beta}=\dfrac{\beta-2}{\beta}$ なので $g(\beta)$ の増減は次のようになる.

β	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(\beta)$		$-$	0	$+$
$g(\beta)$		↘		↗

$g(2)=2-2\log 2=\log\dfrac{e^2}{2^2}>0$ ($\because$ $e^x>x^2$) より

$g(\beta)>0$ つまり $\beta<2\log t$ が示された.

　以上より $0<\alpha<\dfrac{e}{t}$, $0<\beta<2\log t$ なので $0<\alpha\beta<2e\cdot\dfrac{\log t}{t}$ であるが, $t>e$ より

$\log t>0$ なので $0<\dfrac{\log t}{t}=\dfrac{\log t}{e^{\log t}}<\dfrac{1}{\log t}$ ($\because$ $e^x>x^2$) となり $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{\log t}=0$ より

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\alpha\beta=0$. よって $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\dfrac{S_2}{S_1}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6 n は自然数，a は $a>\dfrac{3}{2}$ をみたす実数とし，実数 x の関数

$$f(x)=\int_0^x(x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta$$

を考える．ただし，$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta=1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta$ を示せ．

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ をみたす n と a の値を求めよ．

(3) (2)で求めた n と a に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ．

《15 北大・理系》

【答】 (1) 略　(2) $n=1$，$a=2$　(3) $-\dfrac{1}{2}$

【解説】 (1)
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta &= \Big[-\cos\theta\sin^n\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta)\cdot n\sin^{n-1}\theta\cos\theta d\theta\\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\sin^{n-1}\theta d\theta\\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta-n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta\end{aligned}$$

より $(n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta$ となるので

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta$ が示された．

(2) $\displaystyle f(x)=x\int_0^x(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta-\int_0^x\theta(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta$ より

$$\begin{aligned}f'(x) &= \int_0^x(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta+x(a\sin^{n+1}x-\sin^{n-1}x)-x(a\sin^{n+1}x-\sin^{n-1}x)\\ &= \int_0^x(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta\end{aligned}$$

なので $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \iff \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta=0$

$\displaystyle\iff a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta=0$

これに(1)の結果を代入すると $\displaystyle\left(\frac{an}{n+1}-1\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta=0$ となるが，$n\geqq1$ のとき

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $\sin^{n-1}\theta>0$ だから $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta d\theta>0$．よって $\dfrac{an}{n+1}-1=0$ つまり

$a=1+\dfrac{1}{n}$ となる．

ここで $a>\dfrac{3}{2} \iff 1+\dfrac{1}{n}>\dfrac{3}{2}$ なので $n<2$ つまり $\boldsymbol{n=1}$．ゆえに $\boldsymbol{a=2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$n=1$，$a=2$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x-\theta)(2\sin^2\theta-1)\,d\theta \\ &= \int_0^x (\theta-x)\cos 2\theta\,d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2}\theta\sin 2\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta-\frac{1}{2}x\sin 2\theta\right]_0^x=\frac{1}{4}(\cos 2x-1) \end{aligned}$$

となるので，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathbf{-\dfrac{1}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　複素数と漸化式，三項間漸化式と極限，面積で評価

7　複素数 a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める．

$$a_1=1+i,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-3}$$

ただし，i は虚数単位である．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　複素数平面上の 3 点 0，a_1，a_2 を通る円の方程式を求めよ．

(2)　すべての a_n は(1)で求めた円上にあることを示せ．

《05 北大・理系》

【答】（1）　$|z-1|=1$　　（2）　略

【解説】（1）　$a_2=\dfrac{a_1}{2a_1-3}=\dfrac{1+i}{2(1+i)-3}=\dfrac{1-3i}{5}$ である．

求める円の中心を α，半径を $r\ (>0)$ とすると円の方程式は

$|z-\alpha|=r \iff z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}-r^2=0$ と表され，この円は点 0 を通ることにより $\alpha\overline{\alpha}-r^2=0$ を得るが，更に a_1，a_2 を通ることより

$$\begin{cases}(1+i)(1-i)-(1+i)\overline{\alpha}-(1-i)\alpha=0\\ \dfrac{1-3i}{5}\cdot\dfrac{1+3i}{5}-\dfrac{1-3i}{5}\overline{\alpha}-\dfrac{1+3i}{5}\alpha=0\end{cases}$$

つまり $\begin{cases}2-(1+i)\overline{\alpha}-(1-i)\alpha=0 & \cdots① \\ \dfrac{2}{5}-\dfrac{1-3i}{5}\overline{\alpha}-\dfrac{1+3i}{5}\alpha=0 & \cdots②\end{cases}$ を得る．

①－②×5 より $4i(\alpha-\overline{\alpha})=0$．ゆえに $\alpha=\overline{\alpha}$ より α は実数．これと①より $\alpha=1$．

また $\alpha\overline{\alpha}-r^2=0$ より $r=1$．ゆえに求める円の方程式は $|\boldsymbol{z}-\mathbf{1}|=\mathbf{1}$.

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n-3}$ と $a_1=1+i\neq 0$ より帰納的に $a_n\neq 0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$.

よって

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-3}\iff\frac{1}{a_{n+1}}=2-\frac{3}{a_n}$$
$$\iff\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{2}=-3\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}\right)$$

と変形できるので，$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{2}\right)(-3)^{n-1}$ つまり $a_n=\dfrac{2}{1-(-3)^{n-1}i}$ を得る．

このとき

$$|a_n-1|=\left|\frac{2}{1-(-3)^{n-1}i}-1\right|=\left|\frac{1+(-3)^{n-1}i}{1-(-3)^{n-1}i}\right|=\frac{\left|1+(-3)^{n-1}i\right|}{\left|1-(-3)^{n-1}i\right|}=\frac{\sqrt{1+9^{n-1}}}{\sqrt{1+9^{n-1}}}=1 \text{ より}$$

a_n は $|z-1|=1$ 上にあることが示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

8　xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 C_1，C_2，C_3，…を次のように定める．

- C_1 と C_2 は半径１の円で，互いに外接する．
- 正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある．

円 C_n の半径を r_n とする．

(1)　等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ．

(2)　すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}=s\alpha^n+t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α，β，s，t の値を１組与えよ．

(3)　$n\to\infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ．

《14 名大・理系》

【答】 (1)　略　　(2)　$(\alpha,\ \beta,\ s,\ t)=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

(3)　$k=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，極限値は５

【解説】 (1)　C_n の中心を P_n，C_n と x 軸との接点を H_n とおいて，H_n，H_{n+1}，P_{n+1}，P_n で作られる台形を考えると，三平方の定理より

$$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}{}^2=|\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n-\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}|^2+\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}{}^2 \iff (r_n+r_{n+1})^2=(r_n-r_{n+1})^2+\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}{}^2$$
$$\iff \mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}=2\sqrt{r_nr_{n+1}}$$

となる．同様に $\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}=2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}$，$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2}=2\sqrt{r_nr_{n+2}}$ であることと
$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}=\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2}+\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}$ より $2\sqrt{r_nr_{n+1}}=2\sqrt{r_nr_{n+2}}+2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}$ なので，
$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を得る．

(2)　$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\frac{1}{\sqrt{r_n}}+\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} \iff \frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}-\alpha\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\beta\left(\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}-\alpha\frac{1}{\sqrt{r_n}}\right)$$

と変形できるので $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}-\dfrac{\alpha}{\sqrt{r_n}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}-\dfrac{\alpha}{\sqrt{r_1}}\right)\beta^{n-1}$ となるが，$r_1=r_2=1$ より

$\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}-\dfrac{\alpha}{\sqrt{r_1}}=1-\alpha=\beta$ なので $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}-\dfrac{\alpha}{\sqrt{r_n}}=\beta^n$　…①を得る．また

$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}-\beta\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\alpha\left(\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}-\beta\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}\right)$ と変形することにより，同様に

$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}-\dfrac{\beta}{\sqrt{r_n}}=\alpha^n$　…②となるので①－②より

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{r_n}}=\beta^n-\alpha^n \text{ つまり } \frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-\alpha^n+\beta^n)$$

となるので$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta,\ s,\ t)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$.

(3)　$\alpha\beta=-1$ であることと，(2)の結果より

$$r_n=\frac{1}{\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-\alpha^n+\beta^n)\right\}^2}=\frac{1}{\beta^{2n}}\cdot\frac{5}{\{1-(-\alpha^2)^n\}^2}=\alpha^{2n}\cdot\frac{5}{\{1-(-\alpha^2)^n\}^2}$$

となるので

$$\frac{r_n}{k^n}=\left(\frac{\alpha^2}{k}\right)^n\cdot\frac{5}{\{1-(-\alpha^2)^n\}^2}$$

となる．

　このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\{1-(-\alpha^2)^n\}^2}=5$ より，

$n\to\infty$ のとき $\left\{\frac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束する条件は $\frac{\alpha^2}{k}=1$ つまり $k=\alpha^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

以上より $\boldsymbol{k=\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$，**極限値は 5**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ.

《14 阪大・理系》

【答】 398

【解説】 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ とおくと $f'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}<0$ より自然数 n に対して,

$n<x<n+1$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

が成り立つので

$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}dx>\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx>\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,dx$ つまり $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}>\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

が成り立つ.

$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\frac{1}{\sqrt{n}}$ において $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 39999$ を代入したものの和をとることで

$$\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\sum_{n=1}^{39999}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

この両辺に $\dfrac{1}{\sqrt{40000}}$ を加えることにより

$$\frac{1}{\sqrt{40000}}+\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx<\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

また $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ において $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 39999$ を代入したものの和をとることで

$$\sum_{n=2}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

この両辺に 1 を加えて

$$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<1+\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

ここで $\displaystyle\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{40000}=2(\sqrt{40000}-1)=398$, $\dfrac{1}{\sqrt{40000}}=\dfrac{1}{200}$ より

$$398+\frac{1}{200}<\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}<399$$

となるので, $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は **398**.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　３次の面積と無限級数，不等式が成り立つ条件，斜回転体の体積

10　xy 平面上の曲線 $C: y=x^3+x^2+1$ を考え，C 上の点 $(1,\ 3)$ を P_0 とする．
$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$ とする．このとき P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする．

(1)　S_1 を求めよ．

(2)　x_k を k を用いて表せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$ を求めよ．

《14 東工大・理系》

【答】　(1)　$\dfrac{64}{3}$　　(2)　$x_k=\dfrac{(-2)^{k+2}-1}{3}$　　(3)　$\dfrac{1}{20}$

【解説】　(1)　$y'=3x^2+2x$ より P_0 における接線は $y=5(x-1)+3$　　$\therefore$　$y=5x-2$.

これより

$$x^3+x^2+1=5x-2 \iff (x-1)^2(x+3)=0 \qquad \therefore\ x=-3,\ 1$$

よって

$$S_1=\int_{-3}^{1}\{(x^3+x^2+1)-(5x-2)\}dx=\int_{-3}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{-3}^{1}=\mathbf{\frac{64}{3}}$$

(2)　$x=p$ における C の接線は

$y=(3p^2+2p)(x-p)+p^3+p^2+1$　　$\therefore$　$y=(3p^2+2p)x-2p^3-p^2+1$．これより

$$x^3+x^2+1=(3p^2+2p)x-2p^3-p^2+1 \iff (x-p)^2(x+2p+1)=0$$
$$\therefore\quad x=-2p-1,p$$

よって $x_{k+1}=-2x_k-1$ を得る．ここで $x_{k+1}=-2x_k-1 \iff x_{k+1}+\dfrac{1}{3}=-2\left(x_k+\dfrac{1}{3}\right)$

より $x_k+\dfrac{1}{3}=\left(x_0+\dfrac{1}{3}\right)(-2)^k$ を得る．ゆえに $x_0=1$ より $\boldsymbol{x_k=\dfrac{(-2)^{k+2}-1}{3}}$.

(3)　$x_k-x_{k-1}=-(-2)^{k+1}$ より k が偶数のとき $x_k-x_{k-1}>0$，k が奇数のとき $x_k-x_{k-1}<0$ である．

また $x_{k-1}=p$ とすると，(2)の結果より $x_k=-2p-1$ なので，

(I)　k が奇数のとき

$$S_k=\int_{-2p-1}^{p}\{(x^3+x^2+1)-((3p^2+2p)x-2p^3-p^2+1)\}dx$$
$$=\int_{-2p-1}^{p}\{x^3+x^2-(3p^2+2p)x+2p^3+p^2\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3p^2+2p)x^2+(2p^3+p^2)x\right]_{-2p-1}^{p}$$
$$=\frac{1}{12}(3p+1)^4=\frac{16^{k+1}}{12}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅱ)　k が偶数のとき，(Ⅰ)と同様に

$$\begin{aligned} S_k &= \int_p^{-2p-1}\{((3p^2+2p)x-2p^3-p^2+1)-(x^3+x^2+1)\}dx \\ &= \frac{1}{12}(-3p-1)^4=\frac{16^{k+1}}{12} \end{aligned}$$

以上より $S_k=\dfrac{16^{k+1}}{12}$ なので $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{12}{16^{k+1}}=\frac{\frac{12}{16^2}}{1-\frac{1}{16}}=\boldsymbol{\frac{1}{20}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

11 $a>1$ とし，次の不等式を考える．

$$(*)\quad \frac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1) $a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての $t>0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

《14 東工大・理系》

【答】 (1) 略　(2) $a\geqq 2$

【解説】 (1) $a=2$ のとき，$(*) \iff e^t-1\geqq te^{\frac{t}{2}} \iff e^{\frac{t}{2}}\left(e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}-t\right)\geqq 0$ より

$e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}-t\geqq 0$ を示せばよい．

$e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}-t=f(t)$ とおくと $f'(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\right)-1$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より $e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\geqq 2\sqrt{e^{\frac{t}{2}}\cdot e^{-\frac{t}{2}}}=2$ が成り立つので，$f'(t)\geqq 0$．この結果と $f(0)=e^0-e^0-0=0$ より $t>0$ において $f(t)>0$ が示された．よって $f(t)\geqq 0$ なので $(*)$ が成り立つ．

(2) $e^t-1-te^{\frac{t}{a}}=g(t)$ とおくと，$t>0$において常に $g(t)\geqq 0$ となるような a の条件を求めるとよい．

$g'(t)=e^t-1\cdot e^{\frac{t}{a}}-t\cdot e^{\frac{t}{a}}\cdot\dfrac{1}{a}=e^{\frac{t}{a}}\left\{e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t}-\dfrac{1}{a}t-1\right\}$ となる．$h(t)=e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t}-\dfrac{1}{a}t-1$ とおくと，$h'(t)=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t}-\dfrac{1}{a}$，より $h''(t)=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)^2e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t}>0$ であり，

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}h'(t)=-\frac{1}{a}<0$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}h'(t)=\infty$ なので $h'(t)=0$ をみたす実数はただ１つだけ存在しそれを α とおく．

このとき $h'(0)=\dfrac{a-2}{a}$ なので，$1<a<2$ のとき $h(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	0	↘		↗

となることから，$t=0$ の近辺における $g(t)$ の増減が

t	0	$\cdots$
$g'(t)$		$-$
$g(t)$	0	↘

となるので，$t>0$ の範囲において常に $g(t)\geqq 0$ とならないので不適．

$a\geqq 2$ のとき $h'(0)\geqq 0$ となるので，$t>0$ において $h'(t)>0$．これと $h(0)=0$ より $t>0$ において $h(t)>0$ なので，$g'(t)>0$．これと $g(0)=0$ より $t>0$ において常に $g(t)>0$ と

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

なる．よって $(*)$ が成り立つことになる．

以上より，求める条件は $a \geqq 2$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

12 点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする．さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする．

(1) 点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ．

(2) 直線 $y=a$ と曲線 C がただ１つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ．

(3) 図形 D を y 軸のまわりに１回転して得られる回転体の体積 V を求めよ．

《14 東工大・理系》

【答】 (1) $(x,\ y)=\left(-t^2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}t,\ t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t\right)$ (2) $a=-\dfrac{1}{8}$ (3) $V=\dfrac{11}{120}\pi$

【解説】 (1) $\cos 45°+i\sin 45°=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ なので

$$x+yi=\{t+(\sqrt{2}t^2-2t)i\}\times\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\left(-t^2+\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)+\left(t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)i$$

よって $\boldsymbol{(x,\ y)=\left(-t^2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}t,\ t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t\right)}$

(2) $y=a \iff t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t=a \iff t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t-a=0$ が重解を持てばよいので，

$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-4\times(-a)=0$ ゆえに $\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{8}}$

(3) $t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t=\left(t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{1}{8}$ なので，$t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t\leqq 0$ つまり $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を考える．

このとき $t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t=k\left(-\dfrac{1}{8}\leqq k\leqq 0\right)$ の２解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha\leqq\beta)$ とすると，

$0\leqq\alpha\leqq\beta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり，解と係数の関係より $\alpha+\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\alpha\beta=-k$ である．

ここで $f(t)=-t^2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}t$ とおくと $f(t)=-\left(t-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{9}{8}$ より $0\leqq f(\alpha)\leqq f(\beta)$

である．また，$f(t)=-\left(t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t\right)+\sqrt{2}t$ より $f(\alpha)=\sqrt{2}\alpha-k$，$f(\beta)=\sqrt{2}\beta-k$ なので求める体積は

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\frac{1}{8}}^{0}\pi\{(f(\beta))^2-(f(\alpha))^2\}dk=\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\{(\sqrt{2}\beta-k)^2-(\sqrt{2}\alpha-k)^2\}dk\\
&= \pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\sqrt{2}(\beta-\alpha)\{\sqrt{2}(\alpha+\beta)-2k\}dk\\
&= \pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\sqrt{2(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta}\{\sqrt{2}(\alpha+\beta)-2k\}dk\\
&= \pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\sqrt{8k+1}(-2k+1)dk=\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\left\{-\frac{1}{4}(8k+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{4}(8k+1)^{\frac{1}{2}}\right\}dk\\
&= \pi\left[-\frac{1}{80}(8k+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{48}(8k+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{8}}^{0}=\boldsymbol{\frac{11}{120}\pi}
\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　ド・モワブルと不等式，増減と有理数解，回転体を平面で切る

13 n 自然数とする.

(1) n 個の複素数 z_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $0\leqq \arg z_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたすならば，不等式

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_n|^2$$

が成り立つことを示せ.

(2) n 個の実数 θ_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $0\leqq \theta_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=1$ をみたすならば，不等式

$$\sqrt{n-1} \leqq \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n$$

が成り立つことを示せ.

《04 阪大・理系》

【答】 (1) 略　(2) 略

【解説】 以下，虚数単位を i とする.

(1) $n=1$ のとき，与式は明らかに成り立つ.

$n=k$ $(\geqq 1)$ のとき $|z_1+z_2+\cdots+z_k|^2 \geqq |z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_k|^2$ を仮定すると

$$\begin{aligned}
&|z_1+z_2+\cdots+z_k+z_{k+1}|^2\\
&= (z_1+z_2+\cdots+z_k+z_{k+1})\overline{(z_1+z_2+\cdots+z_k+z_{k+1})}\\
&= |z_1+z_2+\cdots+z_k|^2+z_{k+1}\overline{(z_1+z_2+\cdots+z_k)}+\overline{z_{k+1}}(z_1+z_2+\cdots+z_k)+|z_{k+1}|^2\\
&\geqq |z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_k|^2+|z_{k+1}|^2+\sum_{l=1}^{k}(z_{k+1}\overline{z_l}+\overline{z_{k+1}z_l})
\end{aligned}$$

であるが，$0\leqq \arg z_{k+1} \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq \arg \overline{z_l} \leqq 0$ より $-\dfrac{\pi}{2}\leqq \arg(z_{k+1}\overline{z_l}) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なので

$z_{k+1}\overline{z_l}$ の実部つまり $\dfrac{z_{k+1}\overline{z_l}+\overline{z_{k+1}z_l}}{2}$ は 0 以上. よって $z_{k+1}\overline{z_l}+\overline{z_{k+1}z_l}\geqq 0$ なので

$$\sum_{l=1}^{k}(z_{k+1}\overline{z_l}+\overline{z_{k+1}z_l})\geqq 0$$

ゆえに $|z_1+z_2+\cdots+z_k+z_{k+1}|^2 \geqq |z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_k|^2+|z_{k+1}|^2$ となり，$n=k+1$ のときにも与式は成り立つので，任意の自然数 n について

$|z_1+z_2+\cdots+z_n|^2 \geqq |z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2$ が成り立つことが示された.

(2) $z_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおくと

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k=\sum_{k=1}^{n}\cos\theta_k+i\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k=1+i\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k$ であり，$|z_k|=1$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2=n$ なので，

(1)の結果を用いると

$$n\leqq \left|1+i\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\right|^2=1+\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\right)^2$$

となり，$0\leqq \theta_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k \geqq 0$ なので $\displaystyle\sqrt{n-1}\leqq \sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k$ が示された.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

14 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)=x^{-2}2^x\ (x\neq 0)$ について, $f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ.

(2) 方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ.

(3) 方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ.

《15 名大・理系》

【答】 (1) $x<0,\ \dfrac{2}{\log 2}<x$　(2) 略　(3) $x=2,\ 4$

【解説】 (1) $f'(x)=-2x^{-3}2^x+x^{-2}\cdot(\log 2)2^x=\dfrac{2^x}{x^3}\{(\log 2)x-2\}>0$ より

$\boldsymbol{x<0,\ \dfrac{2}{\log 2}<x}$.

(2) 方程式 $2^x=x^2$ は $x=0$ を解にもたないので, 両辺を x^2 で割ることにより

$2^x=x^2 \iff f(x)=1$ を得る. (1)の結果と $f'(x)=0 \iff x=\dfrac{2}{\log 2}$ より $f(x)$ の増減は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

ここで $f(-1)=\dfrac{1}{2}<1,\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}>1,\ f(2)=f(4)=1$ より, 方程式 $f(x)=1$ は相異なる 3 個の実数解をもつ.

(3) $f(2)=f(4)=1$ より, $2^x=x^2$ の解のうち $x=2,\ 4$ は有理数解である.

$2^x=x^2$ の残りの解は, $f(-1)=\dfrac{1}{2}<1$ と $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}>1$ より $-1<x<0$ に存在するが, この解を α として, α が有理数であると仮定すると $\alpha=-\dfrac{m}{l}$ (l と m は互いに素な自然数で $m<l$) と表せ,

$$2^\alpha=\alpha^2 \iff 2^{-\frac{m}{l}}=\left(-\frac{m}{l}\right)^2$$
$$\iff l^2=m^2 2^{\frac{m}{l}}$$
$$\iff l^{2l}=m^{2l}2^m \quad \cdots①$$

ここで m は自然数, l は自然数より, $m^{2l}2^m$ は偶数なので, l^{2l} つまり l は偶数. よって自然数 k を用いて $l=2k$ と表せるので,

$$① \iff (2k)^{2l}=m^{2l}2^m$$
$$\iff 2^{2l-m}k^{2l}=m^{2l}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで $m<l$ より $2l-m$ は自然数，k，l は自然数より $2^{2l-m}k^{2l}$ は偶数となるので，m^{2l} つまり m は偶数となるが，これは l と m が互いに素であることに矛盾.

よって α は有理数ではない実数なので無理数.

以上より，求める有理数解は $\boldsymbol{x=2,\ 4}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

15　$a>0$ とする．曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに１回転してできる回転体を A とする．

(1)　A の体積 V を求めよ．

(2)　点 $(t,\ 0)$ $(-a\leqq t\leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}ds$$

を示せ．

(3)　不等式

$$\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})}\leqq\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx$$

を示せ．

《15 東工大・理系》

【答】 (1)　$\pi(1-e^{-a^2})$　　(2)　略　　(3)　略

【解説】 (1)　$k=e^{-a^2}$ とおくと，$\log k=-a^2$ などに注意すると

$$\begin{aligned}V&=\int_{k}^{1}\pi x^2dy+a^2\pi\cdot k=\int_{k}^{1}\pi(-\log y)dy+a^2k\pi\\&=\pi\left(-\Big[y\log y-y\Big]_{k}^{1}+a^2k\right)=\pi(1+k\log k-k+a^2k)\\&=\boldsymbol{\pi(1-e^{-a^2})}\end{aligned}$$

(2)　(1)の k を用いると，$k\leqq y\leqq 1$ のとき，$y=e^{-x^2}$ より $x^2=-\log y$ となるので，回転体 A は $\begin{cases}x^2+z^2\leqq-\log y & (k\leqq y\leqq 1)\\ x^2+z^2\leqq a^2 & (0\leqq y<k)\end{cases}$ と表すことができる．この式において $x=t$ と代入することで

$$\begin{cases}t^2+z^2\leqq-\log y & (k\leqq y\leqq 1)\\ t^2+z^2\leqq a^2 & (0\leqq y<k)\end{cases}\iff\begin{cases}y\leqq e^{-(t^2+z^2)} & (k\leqq y\leqq 1)\\ -\sqrt{a^2-t^2}\leqq z\leqq\sqrt{a^2-t^2} & (0\leqq y<k)\end{cases}$$

この部分の面積が $S(t)$ なので $S(t)=\displaystyle\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-(t^2+z^2)}dz$．ここで $\sqrt{a^2-t^2}\leqq a$ で $e^{-(t^2+z^2)}>0$ より

$$S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(t^2+z^2)}dz\quad\text{つまり}\ S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}ds$$

を得る．

(3)　$\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}ds=\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\cdot e^{-t^2}ds=e^{-t^2}\int_{-a}^{a}e^{-s^2}ds$ なので，(2)の結果は $S(t)\leqq e^{-t^2}\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-s^2}ds$ と表せる．

この両辺を $-a\leqq t\leqq a$ で積分すると

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\int_{-a}^{a} S(t)dt \leqq \int_{-a}^{a}\left\{e^{-t^2}\int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds\right\}dt \iff V \leqq \int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds \int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt$$

$$\iff V \leqq \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2$$

を得る．$V=\pi(1-e^{-a^2})$，$\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx \geqq 0$ より $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx$ となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　速度ベクトル，共通接線と増減，球の一部の体積

16　xy 平面上を運動する点 P の時刻 $t\,(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が

$$x=t^2\cos t,\quad y=t^2\sin t$$

で表されている．原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ．

(2)　$\vec{v}$ が y 軸に平行になるような $t\,(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする．このとき不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ．

《15 東工大・理系》

【答】（1）$\dfrac{\pi}{2}$　　（2）略

【解説】（1）$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t^2(\cos t,\ \sin t)$，$\dfrac{dx}{dt}=2t\cos t-t^2\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=2t\sin t+t^2\cos t$ より

$\vec{v}=t(2\cos t-t\sin t,\ 2\sin t+t\cos t)$ なので，$\vec{l}=(\cos t,\ \sin t)$，

$\vec{m}=(2\cos t-t\sin t,\ 2\sin t+t\cos t)$ とおいたときの $\vec{l}$ と $\vec{m}$ のなす角が $\theta(t)$ である．

ここで $\vec{l}\cdot\vec{m}=2$，$|\vec{l}|=1$，$|\vec{m}|=\sqrt{t^2+4}$ より

$$\vec{l}\cdot\vec{m}=|\vec{l}||\vec{m}|\cos\theta(t)\iff 2=1\cdot\sqrt{t^2+4}\cdot\cos\theta(t)\qquad\therefore\quad \cos\theta(t)=\frac{2}{\sqrt{t^2+4}}$$

ここで $\cos\theta(t)=\dfrac{2}{\sqrt{t^2+4}}\to 0\ (t\to\infty)$ より $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$.

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=2t\cos t-t^2\sin t=0$ で $t>0$ より $2\cos t=t\sin t$ となるが，$\cos t\neq 0$ は明らかなので，この式は $\dfrac{2}{t}=\tan t$ と変形できる．

t_1，t_2 はこの方程式の解なので，$\tan t_1=\dfrac{2}{t_1}$，$\tan t_2=\dfrac{2}{t_2}$ をみたす．

また，$u=\dfrac{2}{t}$ と $u=\tan t$ のグラフを考えると，$0<t_1<\dfrac{\pi}{2}$，$\pi<t_2<\dfrac{3}{2}\pi$ といえる．

このとき

$$\tan(t_2-t_1)=\frac{\tan t_2-\tan t_1}{1+\tan t_2\tan t_1}=\frac{\dfrac{2}{t_2}-\dfrac{2}{t_1}}{1+\dfrac{2}{t_2}\cdot\dfrac{2}{t_1}}=\frac{2(t_1-t_2)}{t_1t_2+4}$$

であるが，$\dfrac{\pi}{2}<t_2-t_1<\dfrac{3}{2}\pi$ で $\tan(t_2-t_1)<0$ より $\dfrac{\pi}{2}<t_2-t_1<\pi$.

よって $t_2-t_1<\pi$ が示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

17 a は実数とし，2つの曲線

$$C_1 : y=(x-1)e^x,\quad C_2 : y=\frac{1}{2e}x^2+a$$

がある．ただし，e は自然対数の底である．C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする．

(1) a を t で表せ．

(2) t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ．

《15 北大・理系》

【答】 (1) $a=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t$　　(2) 極小値 -1，$t=0$

【解説】 (1) $y=(x-1)e^x$ より $y'=xe^x$ なので，$x=t$ における接線は

$$y=te^t(x-t)+(t-1)e^t \qquad \therefore\ y=te^tx+(-t^2+t-1)e^t$$

これと C_2 を連立して

$$te^tx+(-t^2+t-1)e^t=\frac{1}{2e}x^2+a \iff \frac{1}{2e}x^2-te^tx+(t^2-t+1)e^t+a=0$$

となり，この方程式が重解をもつので $(-te^t)^2-4\cdot\frac{1}{2e}\cdot\{(t^2-t+1)e^t+a\}=0$ よって

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t}.$$

(2) $f(t)=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t$ とおくと

$f'(t)=te^{2t+1}+\frac{1}{2}t^2\cdot 2e^{2t+1}-(2t-1)e^t-(t^2-t+1)e^t=t(t+1)(e^{t+1}-1)e^t$ より $f(t)$ の増減は

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↘	-1	↗

となるので，求める**極小値は** $f(0)=\boldsymbol{-1}$ で，そのときの t は $\boldsymbol{t=0}$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

18 座標空間の x 軸上に動点P，Qがある．P，Qは時刻0において，原点を出発する．Pは x 軸の正の方向に，Qは x 軸の負の方向に，ともに速さ1で動く．その後，ともに時刻1で停止する．点P，Qを中心とする半径1の球をそれぞれ A，B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 時刻 $t(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ．

(2) $V(t)$ の最大値を求めよ．

《15 阪大・理系》

【答】 (1) $\dfrac{\pi}{3}(-t^3-3t^2+6t+4)$　　(2) $\dfrac{-4+6\sqrt{3}}{3}\pi\ (t=-1+\sqrt{3})$

【解説】 (1) 時刻 t における A の方程式は $(x-t)^2+y^2+z^2=1$，B の方程式は $(x+t)^2+y^2+z^2=1$ と表せる．

それぞれを y^2+z^2 について解くと，$A:y^2+z^2=-x^2+2tx-t^2+1$，$B:y^2+z^2=-x^2-2tx-t^2+1$ となるので

$$V(t)=\int_{-1}^{0}\pi(-x^2-2tx-t^2+1)dx+\int_{0}^{1+t}\pi(-x^2+2tx-t^2+1)dx$$

$$=\pi\left\{\left[-\frac{x^3}{3}-tx^2+(-t^2+1)x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+tx^2+(-t^2+1)x\right]_{0}^{1+t}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}(-t^3-3t^2+6t+4)}$$

(2) $V'(t)=\pi(-t^2-2t+2)$ より

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		↗		↘	

となるので求める最大値は $V(-1+\sqrt{3})$．

ここで $V(t)=\dfrac{\pi}{3}\{(-t^2-2t+2)(t+1)+6t+2\}$ より求める最大値は

$$\frac{6(-1+\sqrt{3})+2}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{-4+6\sqrt{3}}{3}\pi}.$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　楕円と接線，不等式が成り立つ条件，回転体の体積

19　xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする．

$$x^2+4y^2=1,\ x>0,\ y>0$$

Ｐを C 上の点とする．Ｐで C に接する直線を l とし，Ｐを通り l と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする．Ｐが C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときのＰの座標を求めよ．

《15 東北大・理系》

【答】　最大値 $\dfrac{9}{32}$　　$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

【解説】　$C : x^2+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$ で $x>0$，$y>0$ より，$\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表すことができるので，直線 l の方程式は $(\cos\theta)x+4\cdot\dfrac{\sin\theta}{2}\cdot y=1$ つまり $(\cos\theta)x+(2\sin\theta)y=1$ と表せる．

よって直線 m の方程式は $(2\sin\theta)(x-\cos\theta)-(\cos\theta)\left(y-\dfrac{\sin\theta}{2}\right)=0$

ゆえに $(2\sin\theta)x-(\cos\theta)y-\dfrac{3}{2}\sin\theta\cos\theta=0$

よって m と x 軸，y 軸との共有点は $\left(\dfrac{3}{4}\cos\theta,\ 0\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{3}{2}\sin\theta\right)$ となるので

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|\frac{3}{4}\cos\theta\right|\left|-\frac{3}{2}\sin\theta\right| \\ &= \frac{9}{16}\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{9}{32}\sin 2\theta \end{aligned}$$

ここで $0<2\theta<\pi$ より $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ゆえに $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときに S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{32}}$ をとり，

このときＰの座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}\right)$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

20　$t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件(ア)(イ)を満たす.

(ア)　$t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)\geqq 1+x$$

が成り立つ.

(イ)　$t>0$ に対して，等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$$

を満たす実数 x が存在する.

このとき，$f(t)$ を求めよ.

《14 阪大・理系》

【答】　$f(t)=1+\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}-\sqrt{1+t^2}$

【解説】　$g(x)=t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)-(1+x)$ とおくと，すべての実数 x について $g(x)\geqq 0$ で，$g(x)=0$ となる x が存在すればよい．つまり $g(x)$ の最小値が 0 となればよい.

$g'(x)=t\cdot\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}-1=\dfrac{te^{-x}}{2}\left(e^x-\dfrac{1-\sqrt{1+t^2}}{t}\right)\left(e^x-\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\right)$ より，$g(x)$ の増減は

x	$\cdots$	$\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗

となるので $g\left(\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\right)=0$ であればよい.

ここで $x=\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$ は $e^x=\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$ を満たすので，

$$e^{-x}=\frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}}=-\frac{1-\sqrt{1+t^2}}{t}$$

$$\begin{aligned} g\left(\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\right) &= t\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}-\frac{1-\sqrt{1+t^2}}{t}\right)+f(t)-\left(1+\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\right) \\ &= \sqrt{1+t^2}+f(t)-1-\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} \end{aligned}$$

となり，これが 0 なので，$\boldsymbol{f(t)=1+\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}-\sqrt{1+t^2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

21 関数 $f(x)=x-\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを l とする．

(1) l の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ．

(2) a は(1)で求めたものとする．曲線 $y=f(x)$，直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに１回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

《14 九大・理系》

【答】 (1) $l:y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$(a,\ b)=\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $\pi\left(\dfrac{\pi^3}{81}+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{9}{8}\sqrt{3}\right)$

【解説】 (1) $f'(x)=1-\cos x=\dfrac{1}{2}$ より $x=\dfrac{\pi}{3}$．よって l は $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}$

つまり $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$．

このときの接点は $\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$．

(2)
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\pi(x-\sin x)^2\,dx\\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x^2-2x\sin x+\sin^2 x)\,dx\\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(x^2-2x\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx\\
&= \pi\left[\frac{x^3}{3}+2(x\cos x-\sin x)+\frac{2x-\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&= \boldsymbol{\pi\left(\frac{\pi^3}{81}+\frac{\pi}{2}-\frac{9}{8}\sqrt{3}\right)}
\end{aligned}
$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　漸化式と不等式と極限，積分で表された関数，球を回転させた体積

22 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{4a_n-9}{a_n-2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．また数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$$

と定める．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

《15 東工大・理系》

【答】 (1) $a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$ (2) 略 (3) 3

【解説】 (1) $a_{n+1}-3=\dfrac{a_n-3}{a_n-2}$ と $a_1-3=2>0$ より帰納的に $a_n-3>0$ である．

よって $\dfrac{1}{a_{n+1}-3}=\dfrac{a_n-2}{a_n-3}=1+\dfrac{1}{a_n-3}$ とできるので，$\dfrac{1}{a_n-3}=\dfrac{1}{a_1-3}+(n-1)\cdot 1$

ゆえに $\dfrac{1}{a_n-3}=\dfrac{2n-1}{2}$ となるので，$a_n=\dfrac{2}{2n-1}+3$ よって $\boldsymbol{a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}}$．

(2) $b_1=\dfrac{a_1}{1}=5$，$3+\dfrac{4}{1+1}=5$ より，$n=1$ のとき $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ は成り立つ．

$n=k(\geqq 1)$ のとき $b_k \leqq 3+\dfrac{4}{k+1}$ つまり

$\dfrac{a_1+\cdots+ka_k}{1+\cdots+k} \leqq 3+\dfrac{4}{k+1} \iff a_1+\cdots+ka_k \leqq (1+\cdots+k)\left(3+\dfrac{4}{k+1}\right)$ を仮定すると

$$\begin{aligned}
&3+\frac{4}{(k+1)+1}-b_{k+1}\\
&=3+\frac{4}{k+2}-\frac{a_1+\cdots+ka_k+(k+1)a_{k+1}}{1+\cdots+k+(k+1)}\\
&\geqq\ 3+\frac{4}{k+2}-\frac{1}{1+\cdots+k+(k+1)}\left\{(1+\cdots+k)\left(3+\frac{4}{k+1}\right)+(k+1)\cdot\frac{6(k+1)-1}{2(k+1)-1}\right\}\\
&=\ \frac{4k}{(k+1)(k+2)(2k+1)}\ >\ 0
\end{aligned}$$

より $n=k+1$ のときにも $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ は成り立つ．

よって数学的帰納法により任意の自然数 n について $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が示された．

(3) (1)より $a_n>3$ なので $b_n>\dfrac{3+2\cdot 3+\cdots+n\cdot 3}{1+2+\cdots+n}=3$ である．これと(2)の結果より

$3<b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n+1}\right)=3$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=\mathbf{3}$．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

23 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|d\theta$ とおく．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ．

《14 北大・理系》

【答】 (1) $f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|-|\sin x|$

(2) 最大値 1 $\left(x=\frac{\pi}{3}\right)$，最小値 $2-\sqrt{3}$ $\left(x=\frac{5}{6}\pi\right)$

【解説】 (1) $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|d\theta$ より

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|\cdot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)'-|\sin x|\cdot(x)'=\boldsymbol{\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|-|\sin x|}$$

(2) (1)の結果より

$$f'(x)=\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x & \left(0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi\right)\\ -\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x & \left(\frac{2}{3}\pi<x\leqq\pi\right)\end{cases}=\begin{cases}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) & \left(0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi\right)\\ -\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) & \left(\frac{2}{3}\pi<x\leqq\pi\right)\end{cases}$$

となるので，$f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		＋	0	－		－	0	＋	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

となる．

このとき，$|\sin(\theta+\pi)|=|\sin\theta|$ より $f(0)=f(\pi)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\,d\theta$ なので

$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}}$ で最大値 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}=\boldsymbol{1}$ をとり，

$\boldsymbol{x=\frac{5}{6}\pi}$ で最小値 $f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{7}{6}\pi}|\sin\theta|d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\theta\,d\theta=2\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

24　空間内にある半径１の球(内部を含む)を B とする．直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である．

(1)　B の中心と l との距離を求めよ．

(2)　l のまわりに B を１回転してできる立体の体積を求めよ．

《14 名大・理系》

【答】 (1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\dfrac{(9\sqrt{3}+8\pi)\pi}{12}$

【解説】 (1)　B の中心から線分に垂線を下ろすと，垂線の足は丁度線分の中点になるので，三平方の定理より求める距離は $\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$.

(2)　求める立体の体積は xy 平面内の円 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=1$ を x 軸まわりに回転したときにできる立体の体積に等しいので，$x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=1 \iff y=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{1-x^2}$ であることと，y 軸に関する対称性より求める体積は

$$2\left\{\int_0^1\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1\pi\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx\right\}$$

$$=\ 2\pi\left\{\int_0^1\left(\frac{5}{4}-x^2+\sqrt{1-x^2}\right)dx-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1\left(\frac{5}{4}-x^2-\sqrt{1-x^2}\right)dx\right\}$$

$$=\ 2\pi\left\{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{5}{4}-x^2\right)dx+\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\,dx\right\}$$

であるが，

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{5}{4}-x^2\right)dx=\left[\frac{5}{4}x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であることと $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ と $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ については $x=\sin\theta$ と置換積分することで

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos\theta|\cdot\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\left[\frac{2\theta+\sin2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

同様に

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\left[\frac{2\theta+\sin2\theta}{4}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

なので，求める体積は

$$2\pi\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{(9\sqrt{3}+8\pi)\pi}{12}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　極値をもつことの証明，不等式の不等式への応用，球が外接するとき

25　2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

と定義する．$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ１つの極値をとることを証明せよ．

《14 九大・理系》

【答】 略

【解説】 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，

$$\begin{aligned} f_n{}'(x) &= 1\cdot(2x-1)\cdots(nx-1) \\ &+ \cdots \\ &+ (x-1)\cdots\{(k-1)x-1\}\cdot k\cdot\{(k+1)x-1\}\cdots(nx-1) \\ &+ \cdots \\ &+ (x-1)\cdots\{(n-1)x-1\}\cdot n \end{aligned}$$

となる．

このとき $f_n{}'(1)\cdot f_n{}'\left(\dfrac{1}{2}\right)=(n-1)!\cdot\left(-\dfrac{1}{2^{n-2}}\right)(n-2)!<0$,

$f_n{}'\left(\dfrac{1}{n-1}\right)\cdot f_n{}'\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{(-1)^{n-2}}{(n-1)^{n-2}}(n-2)!\cdot\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{n-2}}(n-1)!<0$ であり，

$2\leqq k\leqq n-2$ なる整数 k に関しては

$$\begin{aligned} f_n{}'\left(\frac{1}{k}\right) &= \frac{(-1)^{k-1}}{k^{n-1}}(k-1)\cdots1\cdot k\cdot1\cdots(n-k) \\ f_n{}'\left(\frac{1}{k+1}\right) &= \frac{(-1)^{k}}{(k+1)^{n-1}}k\cdots1\cdot(k+1)\cdot1\cdots(n-k-1) \end{aligned}$$

より $f_n{}'\left(\dfrac{1}{k}\right)\cdot f_n{}'\left(\dfrac{1}{k+1}\right)<0$ となる．

よって $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，常に $f_n{}'\left(\dfrac{1}{k}\right)$ と $f_n{}'\left(\dfrac{1}{k+1}\right)$ は異符号となる．ここで $f_n{}'(x)$ が連続関数で，$n-1$ 次関数であることより，中間値の定理から $f_n{}'(x)=0$ となる x が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ にただ１つだけ存在し，それを α_k とすると，$f_n(x)$ の増減は

x	$\dfrac{1}{k+1}$	$\cdots$	α_k	$\cdots$	$\dfrac{1}{k}$
$f_n{}'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		↗		↘	

または

x	$\dfrac{1}{k+1}$	$\cdots$	α_k	$\cdots$	$\dfrac{1}{k}$
$f_n{}'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$		↘		↗	

となる．

以上より $f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ１つの極値をとることが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

26 以下の問いに答えよ．

(1) n を自然数，a を正の定数として，

$$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$$

とおく．$x>0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

《14 東北大・理系》

【答】 (1) 極小値 0　　(2) 略

【解説】 (1) $f'(x)=(n+1)\cdot\dfrac{1}{a+x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{nx-a}{x(a+x)}$ より $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{n}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

となるので，$f(x)$ の極値は極小値で $f\left(\dfrac{a}{n}\right)=(n+1)\log\dfrac{a}{n}-n\log\dfrac{a}{n}-\log\dfrac{a}{n}=\mathbf{0}$

(2) (1)の結果より

$$f(x)\geqq 0 \iff (n+1)\log\frac{a+x}{n+1}-n\log\frac{a}{n}-\log x\geqq 0$$

$$\iff \left(\frac{a+x}{n+1}\right)^{n+1}\geqq\left(\frac{a}{n}\right)^{n}x \iff \frac{a+x}{n+1}\geqq\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}x^{\frac{1}{n+1}} \quad\cdots①$$

が成り立つ．

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{k+1}{k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+1}{1}+\frac{2+1}{2}\right)=\frac{7}{4}=\sqrt{\frac{49}{16}}>\sqrt{3}$，$(2+1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ より $n=2$ のとき与式は成り立つ．

ここで，$n=l(\geqq 2)$ のとき $\dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{l}\frac{k+1}{k}>(l+1)^{\frac{1}{l}} \iff \sum_{k=1}^{l}\frac{k+1}{k}>l(l+1)^{\frac{1}{l}}$ を仮定すると

$$\frac{1}{l+1}\sum_{k=1}^{l+1}\frac{k+1}{k}=\frac{1}{l+1}\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{k+1}{k}+\frac{l+2}{l+1}\right)$$

$$>\frac{1}{l+1}\left\{l(l+1)^{\frac{1}{l}}+\frac{l+2}{l+1}\right\}\quad(\because\ 仮定)$$

$$\geqq\left\{\frac{l(l+1)^{\frac{1}{l}}}{l}\right\}^{\frac{l}{l+1}}\cdot\left(\frac{l+2}{l+1}\right)^{\frac{1}{l+1}}\quad\left(\because\ ①\ で\ n=l,\ a=l(l+1)^{\frac{1}{l}},\ x=\frac{l+2}{l+1}\right)$$

$$=(l+2)^{\frac{1}{l+1}}$$

となり，$n=l+1$ のときにも与式が成り立つことになる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって数学的帰納法により，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$ $(n\geqq 2)$ が示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

27 半径１の２つの球 S_1 と S_2 が１点で接している．互いに重なる部分のない等しい半径を持つ n 個 $(n \geqq 3)$ の球 T_1，T_2，…，T_n があり，次の条件㈠㈡を満たす．

㈠ T_i は S_1，S_2 にそれぞれ１点で接している $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

㈡ T_i は T_{i+1} に１点で接しており $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，そして T_n は T_1 に１点で接している．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) T_1，T_2，…，T_n の共通の半径 r_n を求めよ．

(2) S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，T_1，T_2，…，T_n の体積の和を W_n とするとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$$

を求めよ．

《14 阪大・理系》

【答】 (1) $r_n=2\tan^2\dfrac{\pi}{n}$　(2) $\dfrac{2}{3}$

【解説】 (1) S_1 と S_2 の接点を P，S_1 の中心を Q，T_1 と T_2 の中心を順に R_1，R_2 とすると，三角形 PQR_1 は $\angle\mathrm{QPR}_1=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形より $1^2+\mathrm{PR_1}^2=(1+r_n)^2$　…①.

また，R_1 と R_2 の中点を M とすると三角形 PMR_1 は $\angle\mathrm{PMR}_1=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形より

$\sin\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{r_n}{\mathrm{PR}_1}$　…②.

①，②より $r_n\left(2\tan^2\dfrac{\pi}{n}-r_n\right)=0$ となるので

$\boldsymbol{r_n=2\tan^2\dfrac{\pi}{n}}$.

(2) 三角形 PQR_1 を含む平面で，P を原点，Q を $(0,\ 1)$ とし，R_1 を x 軸の正の部分の点とすると，

T_1 の断面は $(x-\mathrm{PR}_1)^2+y^2={r_n}^2$ と表されるので $x=\mathrm{PR}_1\pm\sqrt{{r_n}^2-y^2}$ である．よって

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{-r_n}^{r_n}\pi(\mathrm{PR}_1+\sqrt{{r_n}^2-y^2})^2dy-\int_{-r_n}^{r_n}\pi(\mathrm{PR}_1-\sqrt{{r_n}^2-y^2})^2dy \\ &= 8\pi\mathrm{PR}_1\int_0^{r_n}\sqrt{{r_n}^2-y^2}\,dy \end{aligned}$$

となる．ここで $\displaystyle\int_0^{r_n}\sqrt{{r_n}^2-y^2}\,dy$ において $y=r_n\sin\theta$ と置換積分することにより

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\begin{aligned}\int_0^{r_n}\sqrt{{r_n}^2-y^2}\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r_n|\cos\theta|\cdot r_n\cos\theta\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} {r_n}^2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\\ &= {r_n}^2\left[\frac{2\theta+\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{{r_n}^2}{4}\pi\end{aligned}$$

なので $V_n=2\pi^2{r_n}^2\mathrm{PR}_1$ を得る．また $W_n=\dfrac{4}{3}\pi{r_n}^3\times n$ より

$$\frac{W_n}{V_n}=\frac{\frac{4}{3}\pi{r_n}^3\times n}{2\pi^2{r_n}^2\mathrm{PR}_1}=\frac{2nr_n}{3\pi\mathrm{PR}_1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{n}\to\boldsymbol{\frac{2}{3}}\ (n\to\infty)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　複素数の実部や絶対値，積分と不等式と極限，積分と漸化式

28 z を絶対値が 1 の複素数とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) z^3-z の実部が 0 となるような z をすべて求めよ．

(2) z^5+z の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ．

(3) n を自然数とする．z^n+1 の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ．

《04 東北大・理系》

【答】 (1) $z=\pm1,\ \pm i$　(2) $z=\dfrac{\pm1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\ \dfrac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}$ (複号任意)　(3) 1

【解説】 以下，虚数単位を i とする．

(1) z^3-z の実部が 0 なので，$|z|^2=z\overline{z}=1$ に注意すると

$$\frac{(z^3-z)+\overline{(z^3-z)}}{2}=0 \iff z^3+\overline{z}^3-z-\overline{z}=0$$
$$\iff (z+\overline{z})\{(z+\overline{z})^2-3z\overline{z}-1\}=0$$
$$\iff (z+\overline{z})\{(z+\overline{z})^2-4\}=0$$
$$\iff (z+\overline{z})(z+\overline{z}-2)(z+\overline{z}+2)=0$$
$$\iff \frac{z+\overline{z}}{2}=0,\ \pm1$$

となる．これと $|z|=1$ より $\boldsymbol{z=\pm1,\ \pm i}$

(2) $|z^5+z|=|z(z^4+1)|=|z||z^4+1|$ で $|z|=1$ より $|z^4+1|=1$

ここで $|z|=1$ より $z=\cos\theta+i\sin\theta\,(0\leqq\theta<2\pi)$ とおけるので

$$\begin{aligned}|z^4+1|&=|\cos4\theta+i\sin4\theta+1|\\&=|2\cos2\theta(\cos2\theta+i\sin2\theta)|\\&=|2\cos2\theta|\ (\because\ \ |\cos2\theta+i\sin2\theta|=1)\\&=1\end{aligned}$$

より $\cos2\theta=\pm\dfrac{1}{2}$．よって $2\theta=\dfrac{k}{3}\pi\ (k=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11)$ より

$\theta=\dfrac{k}{6}\pi\ (k=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11)$．

ゆえに求める z は $\boldsymbol{z=\dfrac{\pm1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\ \dfrac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}}$ **(複号任意)**．

(3) $|z|=1$ より $z=\cos\theta+i\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおけるので，(2)と同様に

$$\begin{aligned}|z^n+1|&=|\cos n\theta+i\sin n\theta+1|\\&=\left|2\cos\frac{n\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)\right|\\&=\left|2\cos\frac{n\theta}{2}\right|\ =\ 1\end{aligned}$$

より $\dfrac{n\theta}{2}=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi+k\pi\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ つまり

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\theta=\dfrac{2}{3n}\pi+\dfrac{2k}{n}\pi,\ \dfrac{4}{3n}\pi+\dfrac{2k}{n}\pi\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$

よって 求める複素数を $\cos\alpha+i\sin\alpha$ とすると,

$\alpha=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3n}\pi+\frac{2k}{n}\pi+\frac{4}{3n}\pi+\frac{2k}{n}\pi\right)=\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{2\pi}{n}\times\frac{n(1+2n-1)}{2}=2n\pi$ より,

求める複素数は $\cos\alpha+i\sin\alpha=\mathbf{1}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

29　自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)(x\geqq 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^n f_n(x)dx\leqq\int_0^1\log(1+x)dx$ を示せ.

(2)　数列 $\{I_n\}$を

$$I_n=\int_0^n f_n(x)dx$$

で定める．$0\leqq x\leqq 1$ のとき $\log(1+x)\leqq\log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることは用いてよい.

《15阪大・理系》

【答】（1）略　（2）$2\log 2-1$

【解説】（1）$\displaystyle\int_0^n f_n(x)dx=\int_0^n\frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx$ において $\dfrac{x}{n}=t$ と置換積分すると

$$\int_0^n f_n(x)dx=\int_0^1\frac{t}{1+nt}\log(1+t)\cdot ndt=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)dt$$

となる．ここで $0\leqq t\leqq 1$ のとき $\log(1+t)\geqq 0$，$0\leqq 1-\dfrac{1}{1+nt}=\dfrac{nt}{1+nt}<1$ より

$\left(1-\dfrac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)\leqq\log(1+t)$ が成り立つ．よって $\displaystyle\int_0^n f_n(x)dx\leqq\int_0^1\log(1+x)dx$ が示された.

(2)　$\displaystyle I_n=\int_0^n f_n(x)dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)dt=\int_0^1\log(1+t)dt-\int_0^1\frac{1}{1+nt}\log(1+t)dt$

である．ここで $0\leqq t\leqq 1$ のとき $0\leqq\log(1+t)\leqq\log 2$ が成り立つので

$\displaystyle 0\leqq\int_0^1\frac{1}{1+nt}\log(1+t)dt\leqq\int_0^1\frac{\log 2}{1+nt}dt$ であるが,

$$\int_0^1\frac{\log 2}{1+nt}dt=\left[\frac{\log 2}{n}\log(1+nt)\right]_0^1$$

$$=\frac{(\log 2)\log(1+n)}{n}=(\log 2)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\log(1+n)}{1+n}\ \to\ 0\ (n\to\infty)\ \text{より}$$

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+nt}\log(1+t)dt\ \to\ 0\ (n\to\infty)$ となるので

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\int_0^1\log(1+t)dt=\Big[(1+t)\log(1+t)-t\Big]_0^1=\mathbf{2\log 2-1}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

30 整数 n に対して，$I_n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}dx$ とする．

(1) I_0 を求めよ．

(2) n を正の整数とするとき，I_n-I_{n-1} を求めよ．

(3) I_5 を求めよ．

《14 東北大・理系》

【答】 (1) $\frac{1}{2}\log 2$　(2) $\begin{cases} 0 & (n \text{ が } 4 \text{ の倍数のとき}) \\ -\frac{1}{n} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{2}{n} & (n \text{ が } 4 \text{ の倍数でない偶数のとき}) \end{cases}$　(3) $\frac{1}{2}\log 2-\frac{8}{15}$

【解説】 (1) $I_0=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\Big[\log|\sin\theta|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\log 1-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$

(2)

$$\begin{aligned} I_n-I_{n-1} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n+1)x)-\cos((2n-1)x)}{\sin x}dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin 2nx\sin x}{\sin x}dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-2\sin 2nx)dx \\ &= \left[\frac{1}{n}\cos 2nx\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{n}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n}{2}\pi\right) \\ &= \begin{cases} \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{n} \textbf{ が 4 の倍数のとき}) \\ \boldsymbol{-\frac{1}{n}} & (\boldsymbol{n} \textbf{ が奇数のとき}) \\ \boldsymbol{\frac{2}{n}} & (\boldsymbol{n} \textbf{ が 4 の倍数でない偶数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

(3) (2)の結果より $I_5-I_4=-\frac{1}{5}$，$I_4-I_3=0$，$I_3-I_2=-\frac{1}{3}$，$I_2-I_1=1$，$I_1-I_0=-1$ なので

$I_5=I_0-\frac{1}{5}+0-\frac{1}{3}+1-1=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2-\frac{8}{15}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。